

# ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР

1986

ТОМ 289 № 4

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

Член-корреспондент АН СССР Э.И. ГРИГОЛЮК,  
П.Я. НОСАТЕНКО

# О ЧИСЛЕННОМ ОБОСНОВАНИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Успешные исследования существования и единственности [1], а также сходности численных методов, в частности метода конечных элементов [2], позволяют считать эти проблемы в линейной теории упругости достаточно разработанными. Иначе обстоит дело в нелинейных задачах, которые вместе с тем успешно решаются, в том числе и с использованием матричных методов.

В данной работе рассматривается численное обоснование существования и единственности решения геометрически нелинейной задачи теории упругости на основе метода конечных элементов, наиболее широко применяемого в изучении прочности конструкций.

1. В случае, когда нелинейные деформации являются малыми и уместна исходная геометрическая форма, наиболее приемлем метод конечных элементов в форме матричного метода перемещений с использованием материальных элементов [3].

Введем тензор деформаций

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial u_k}{\partial x_{\beta}} \right]$$

и тензор напряжений

$$\sigma_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta\gamma k} \epsilon_{\gamma k},$$

$x_{\alpha}$  — декартовы координаты,  $E_{\alpha\beta\gamma k}$  — тензор упругости обобщенного закона Гука. Аппроксимируя локальные поля возможных перемещений [2, 3] и используя вариационный принцип Лагранжа  $\delta(W - A) = 0$ , где  $W$  — энергия деформации и  $A$  — работа внешних объемных  $p_{\alpha}$  и поверхностных  $t_{\alpha}$  сил соответственно,

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_0} \epsilon_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta\gamma k} \epsilon_{\gamma k} dv, \quad A = \int_{V_0} p_{\alpha} u_{\alpha} dv + \int_{\Omega_0} t_{\alpha} u_{\alpha} d\omega,$$

получаем конечноэлементный эквивалент уравнений равновесия

$$(1) \quad f(U) = K_L U + k_N(U) = Q.$$

Здесь  $U$  — вектор обобщенных узловых перемещений,  $[K_{Lij}] = \left[ \frac{\partial^2 W_L}{\partial u_i \partial u_j} \right]$ ,

$\{k_{Ni}(U)\} = \left\{ \frac{\partial W_N}{\partial u_i} \right\}$  — постоянная квадратная симметричная положительно-определенная линейная матрица жесткости и вектор нелинейных частей. Часть энергии деформации  $W_L$  обусловлена линейными составляющими тензора деформации,  $W_N$  связана с учетом геометрической нелинейности. Отметим, что кинематические граничные условия могут быть введены в основное разрешающее уравнение [4],

поэтому в дальнейшем под нагрузкой будем понимать вектор  $Q$ , содержащий как заданные обобщенные силы, так и перемещения.

2. Для решения нелинейных уравнений типа (1) базисным является метод Ньютона [5], следующий из разложения  $f(U)$  в ряд Тейлора в окрестности начального приближения. В результате получаем следующую рекуррентную зависимость:

$$(2) \quad [K_L + D(U^{[m-1]})]U^{[m]} = Q - k_N(U^{[m-1]}) + D(U^{[m-1]})U^{[m-1]}.$$

Симметричную квадратную матрицу  $D(U)$ , определяемую соотношением

$$(3) \quad [D_{ij}(U)] = \left[ \frac{\partial k_{Ni}}{\partial u_j} \right] = \left[ \frac{\partial^2 W_N}{\partial u_i \partial u_j} \right],$$

назовем частичной матрицей-якобианом, в отличие от полной матрицы Якоби

$$(4) \quad [J_{ij}(U)] = \left[ \frac{\partial f_i(U)}{\partial u_j} \right] = [K_{Lij} + D_{ij}(U)].$$

Если положить матрицу  $D(U)$  (3) нулевой, то из (2) следует метод простой итерации; считая частичную матрицу-якобиан постоянной, получаем модифицированный метод Ньютона. Схема метода Ньютона, представленная в форме (2), наиболее удобна для анализа. Так, из (2) следует, что если задано нулевое начальное приближение, то на первой итерации метод Ньютона дает решение линейной задачи теории упругости:

$$(5) \quad U^{[1]} = K_L^{-1}Q.$$

3. Предположение о существовании и единственности решения линейной задачи теории упругости позволяет установить условие однозначной разрешимости геометрически нелинейной задачи. Пусть при некоторой нагрузке  $q_0$  нелинейные составляющие тензора деформации пренебрежимо малы и единственное решение  $v_0$  линейной задачи определяется соотношением (5). Определим условие, при котором уравнение (1), переписанное как

$$(6) \quad g(v, q) = K_L v + k_N(v) - q = 0,$$

где  $v = v_0 + \delta v$ ,  $q = q_0 + \delta q$ ,  $\delta q = \lambda q_0$ ,  $\lambda > 0$ , имеет решение  $v$  и притом единственное.

Рассмотрим полную вариацию уравнения (6):

$$(7) \quad \delta g(v, q) = \frac{\partial g(v, q)}{\partial v} \delta v + \frac{\partial g(v, q)}{\partial q} \delta q = 0,$$

где

$$(8) \quad \frac{\partial g(v, q)}{\partial v} = J(v, q) = K_L + D(v, q), \quad \frac{\partial g(v, q)}{\partial q} = -E.$$

В выражениях (8)  $E$  — единичная матрица, наличие  $q$  в виде параметра указывает на то, что матрица Якоби  $J$  (4), как и  $v$ , определяется величиной  $q$ . Из (7) и (8) следует, что приращение вектора решения  $\delta v$  определяется через  $\delta q$ :

$$(9) \quad \delta v = J^{-1}(v, q) \delta q.$$

Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости уравнения (9), а следовательно, и уравнения (6) или (1), является условие обратимости матрицы Якоби:

$$(10) \quad \det J(v, q) \neq 0.$$

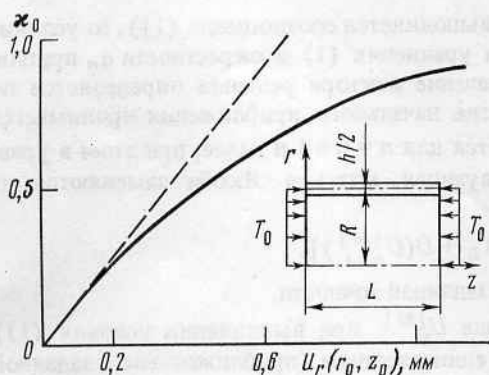


Рис. 1

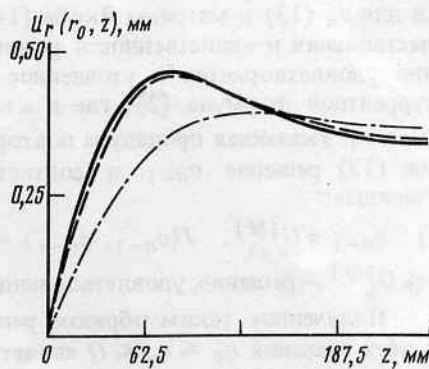


Рис. 2

Полученный результат совпадает со следствием теоремы о неявной функции [6]. Отметим также, что нарушение единственности решения функционального уравнения равновесия (6) в окрестности предельных точек  $q^*$ , где

$$\det J(v^*, q^*) = \left\| \frac{\partial^2 W(q^*, v^*)}{\partial v_i \partial v_j} \right\| = \frac{dq}{dv} \bigg|_{q^*, v^*} = 0,$$

является одним из основных утверждений общей теории положений равновесия материальных систем, развитой А. Пуанкаре [7], и давно используется для определения верхних и нижних критических значений параметра нагрузки [8].

Окончательно, при учете положительной определенности линейной матрицы жесткости и непрерывной зависимости матрицы Якоби (4) от нагрузки, возможно дать следующую формулировку: если при некотором значении нагрузки  $q_0$ , для которого деформированное состояние может быть описано уравнениями линейной теории упругости, существует единственное решение  $v_0$  и для всякой последовательности нагрузок  $q_n = q_0 + \sum_{i=1}^n \delta q_i$ ,  $\delta q_i = \lambda_i q_0$ ,  $\lambda_i > 0$ , выполняется условие

$$(11) \quad \det J(v_n, q_n) = \det [K_L + D(v_n, q_n)] > 0,$$

то решение геометрически нелинейной задачи, описываемой конечноэлементным аналогом (1) нескаларных уравнений, существует и единственно всюду в области  $q_0 \leq Q \leq q_n$ .

4. Алгоритм численного исследования существования и единственности решения нелинейной задачи теории упругости основан на сочетании метода Ньютона с методом пошагового нагружения, следующим из приближенного выполнения соотношения (7).

Зададимся ограниченной последовательностью нагрузок

$$(12) \quad q_n = q_0 + \sum_{i=1}^n \Delta q_i, \quad \lim_{n \rightarrow N} q_n = Q,$$

где  $N$  — общее число шагов по нагрузке,  $\Delta q_i = (Q - q_0)/\Lambda_i$ ,  $\Lambda_i$  — достаточно большое число. Тогда из (8) приближенное значение  $v_n(q_n)$  может быть определено как

$$(13) \quad v_n = v_{n-1} + [K_L + D(v_{n-1})]^{-1} \Delta q_n,$$

а соответствующее  $v_n, q_n$  значение матрицы-якобиана

$$(14) \quad J(v_n, q_n) = [K_L + D(v_n)].$$

Если для  $v_n$  (13) и матрицы Якоби (14) выполняется соотношение (11), то условие существования и единственности решения уравнения (1) в окрестности  $q_n$  приближенно удовлетворяется и уточненное значение вектора решения определяется по рекуррентной формуле (2), где в качестве начального приближения принимается  $U_n^{[0]} = v_n$ . Указанная процедура повторяется для  $n = n + 1$  и далее, при этом в уравнении (13) решение  $v_{n-1}$  и соответствующая матрица Якоби заменяются на уточненные:

$$(15) \quad v_{n-1} = U_{n-1}^{[M]}, \quad J(v_{n-1}, q_{n-1}) = [K_L + D(U_{n-1}^{[M]})].$$

Здесь  $U_n^{[M]}$  — решение, удовлетворяющее заданной точности.

Полученное таким образом решение  $U_N^{[M]}$  при выполнении условия (11) для всех значений  $q_0 \leq q_n \leq Q$  является единственным (приближенным с заданной точностью) решением конечноэлементного аналога (1) уравнений теории упругости. Заметим, что решение, полученное для  $Q$  по зависимостям (2), будет совпадать с заданной точностью с решением по алгоритму (12)–(15).

5. В качестве примера применения алгоритма (12)–(15) приведем расчет нагрузочной характеристики для шарнирно опертой тонкой упругой цилиндрической оболочки, сжатой приложенными к торцам осевыми силами  $T_0 = \kappa_0 E h^2 / (R \sqrt{3(1 - \nu^2)})$ . Указанная задача в рамках классической теории оболочек имеет точное аналитическое решение [9]. Нелинейная задача теории упругости решалась на основе конечноэлементной методики с использованием осесимметричного треугольного элемента с линейной аппроксимацией локального поля перемещений при следующих значениях параметров:  $R = 1000$  мм,  $L = 500$  мм,  $h = 4$  мм,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0,3$ . На рис. 1 приведены расчетная схема и зависимость  $u_r(r_0, z_0) - \kappa_0$ , координаты точки  $r_0 = R$ ,  $z_0 = 0,2L$  (штриховая линия соответствует линейному решению, сплошная — нелинейному). На рис. 2 показано изменение прогибов  $u_r(r_0, z)$  вдоль осевой координаты  $z$  для значения  $\kappa_0 = 0,5$  (сплошной линией показано аналитическое решение [9], штриховой — нелинейное и штрих-пунктирной — линейное конечноэлементные решения). Частично линеаризованные деформационные соотношения в цилиндрической системе координат в рассматриваемом случае принимались в виде [10].

Московский автомеханический институт

Поступило  
25 II 1986

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
2. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
3. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
4. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
5. Канторович Л.В. — УМН, 1948, т. 3, вып. 6, с. 89–185.
6. Чиллингуорт Д.Р.Дж. В кн.: Механика деформируемых твердых тел: направления развития. М.: Мир, 1983, с. 76–120.
7. Poincaré H. — Acta math., 1885, vol. 7, p. 259–380.
8. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 204 с.
9. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигиздат, 1957. 432 с.
10. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я. — Вестн. МГУ. Сер. 1, Матем., мех., 1985, № 1, с. 75–78.